

MATEMATICĂ M2

Ghid pentru pregătirea examenului de Bacalaureat

- **Itemi de antrenament**
- **99 de teste**
- **Modele de subiecte date
în perioada 2014-2019**

Cuprins

PROGRAMA DE EXAMEN MATEMATICĂ – BACALAUREAT 3

BREVIAR TEORETIC 11

CLASA A IX-A

ALGEBRĂ.....	11
I. Numere reale	11
II. Progresii aritmetice și geometrice	12
III. Funcții	13
GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE	15
I. Vectori în plan.....	15
II. Geometrie analitică în plan.....	16
III. Trigonometrie.....	16

CLASA A X-A

I. Puteri cu exponent natural. Puteri cu exponent întreg negativ. Puteri cu exponent rațional. Puteri cu exponent real.....	18
II. Radicalul de ordin n	18
III. Logaritmi.....	19
IV. Forma algebrică a unui număr complex. Numere complexe conjugate. Modulul unui număr complex	20
V. Funcții injective. Funcții surjective. Funcții bijective. Funcții inversabile. Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical de ordinul n . Funcția exponențială. Funcția logaritmică. Funcția sinus. Funcția arcsinus. Funcția cosinus. Funcția arccosinus. Funcția tangentă. Funcția arctangentă. Funcția cotangentă. Funcția arccotangentă.....	21
VI. Ecuații trigonometrice.....	27
VII. Permutări. Aranjamente. Combinări. Binomul lui Newton	28

CLASA A XI-A

I. Matrice	30
II. Determinanți.....	31
III. Sisteme de ecuații liniare.....	33
IV. Limite de funcții.....	35
V. Funcții continue.....	39
VI. Funcții derivabile. Aplicații ale derivatelor în studiul ecuațiilor și funcțiilor. Reprezentarea grafică a funcțiilor	41

CLASA A XII-A

ALGEBRĂ.....	49
I. Legi de compoziție.....	49
II. Structuri algebrice	49
III. Polinoame.....	51
ANALIZĂ MATEMATICĂ.....	53
I. Formula de integrare prin părți.....	53
II. Teorema de schimbare de variabilă.....	53
III. Integrarea funcțiilor raționale	54
IV. Integrale definite	55

ITEMI DE ANTRENAMENT	57
Numere reale.....	57
Progresii	61
Funcții	62
Vectori în plan. Geometrie analitică în plan.....	66
Trigonometrie	68
Mulțimea numerelor complexe	71
Funcții și ecuații.....	72
Elemente de combinatorică.....	75
Matematici financiare	78
Elemente de calcul matriceal și sisteme de ecuații liniare.....	79
Funcții continue și funcții derivabile.....	83
Grupuri. Inele și corpuri. Inele de polinoame	90
Primitive. Integrale definite	97

TESTE RECAPITULATIVE	103
-----------------------------------	-----

SOLUȚII TESTE RECAPITULATIVE

• cu rezolvare completă (1-60).....	216
• cu bareme (61-100)	273

ITEMI DE ANTRENAMENT

Numere reale

1. Calculați:

- $3^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{2}}$;
- $(13^2 - 5^2) : 6^2$;
- $(1^0 + 2^0 + \dots + 9^0) : 9^1$;
- $55 \cdot 36 + 45 \cdot 36 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$;
- $(0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,9) : 2 = \left(\frac{10}{3}\right)^{-1}$.

2. Arătați că:

- $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$;
- $x = 1,25 : 0,5 + \frac{3}{2}$ și $y = 3\frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 2$ sunt numere naturale consecutive;
- numărul $2\sqrt{3}(5\sqrt{6} - \sqrt{12})$ este irațional;
- $\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} - \frac{2}{\sqrt{24}}\right) : \frac{7\sqrt{6}}{12}$ este număr întreg;
- $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{10} - \sqrt{9}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{10}} > 0$;
- $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{9}} \in (0; 1)$.

3. Arătați că:

- $(1 + \sqrt{5})^2 + (1 - \sqrt{5})^2 \in \mathbb{N}$;
- $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} \in \mathbb{N}$;
- $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{80} + \sqrt{120}) : \sqrt{20} + (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-1}$ este număr natural nenul.

4. Arătați că:

- $\sqrt[3]{64} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} \in \mathbb{N}$;
- $(\sqrt[3]{128} - \sqrt[3]{16}) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{8}}$ este număr irațional.

5. a) Comparați numerele: $\sqrt{2}$ și $\sqrt[3]{3}$.

b) Ordonați crescător numerele: 2 ; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{3}$.

c) Ordonați crescător numerele: $\log_4 32$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{12}$.

6. Raționalizați fracția:

a) $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}}$;

b) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$.

7. Aflați a, b numere raționale pentru care:

a) $a + b\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$;

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{3}) : \sqrt{3} + (a + \sqrt{2})^2 = (a - 2)(a + 2) + b$;

c) $(a + \sqrt{3})^2 - (b - \sqrt{3})^2 = (a - b)(a + b)$.

8. Raționalizați fracția: $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}$.

9. Demonstrați că $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \in \mathbb{Z}$.

10. Demonstrați egalitatea: $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$.

11. Arătați că: $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} \in \mathbb{N}$.

12. Care este cel mai mare dintre numerele: $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}$.

13. Calculați:

a) $\log_2 10 - \log_2 5$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} 3 + \log_{\frac{1}{3}} 27$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - \log_4 16$;

d) $\log_6 3 + \log_6 10 - \log_6 5$;

e) $\log_3 9 - \log_5 25$;

f) $5^{\log_5 3}$;

g) $\log_9 3 - \log_8 2$.

14. Determinați x în cazurile:

a) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$; b) $\log_x 216 = 3$; c) $\log_x \frac{1}{81} = 4$; d) $\log_x \sqrt{8} = \frac{3}{4}$;

e) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$; f) $\log_{\sqrt[3]{3}} x = -\frac{3}{2}$; g) $\log_{0,04} 5 = x$; h) $\log_x 0,125 = -2$.

15. Calculați:

a) $2^{\log_2 4}$; b) $3^{\log_3 6}$; c) $25^{\log_5 3}$; d) $36^{\log_6 2}$;

e) $81^{0,5 \log_3 7}$; f) $\log_2 (\log_4 16)$; g) $3^{2 - \log_3 2}$; h) $4^{\sqrt{\log_4 5}} - 5^{\sqrt{\log_5 4}}$.

16. Să se logaritmeze expresiile următoare pentru $a > 0, b > 0$:

a) $\frac{4ab^3}{5\sqrt{2ab}}$; b) $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}\right)^4$; c) $\frac{a\sqrt{b\sqrt{a}}}{b\sqrt{a\sqrt{b}}}$; d) $\sqrt{a^{2+\sqrt{b}}}$; e) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}$.

17. Determinați valorile reale ale lui x pentru care sunt definiți următorii logaritmi:

- a) $\log_2(x^2 - 2x)$; b) $\log_3(-2x^2 + 4)$; c) $\log_5(x^4 - 5x^2 + 4)$;
 d) $\log_6(-x^2 + 8x - 16)$; e) $\log_2(\log_3 x)$; f) $\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)$;
 g) $\log_{\sqrt{2}}(4 - x^2)$; h) $\log_a(\log_a x)$; i) $\log_a(\log_b x)$;
 j) $\log_{x-2}(x - 1)$; k) $\log_{2-|x|}(x^2 - 2)$; l) $\log_{x+1}(4 - x^2)$.

18. Arătați că $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{2021} 2020 < 1$.

19. Arătați că $\frac{1}{\frac{1}{\log_2 2021} + \frac{1}{\log_3 2021} + \dots + \frac{1}{\log_{2020} 2021}} = \log_{2020!} 2021$.

20. Calculați $\frac{\log_5 18 - \log_5 2}{\log_5 3}$.

21. Calculați: $\log_{21} 3 \cdot \log_7 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 7 \cdot (1 + \log_3 7)$.

22. Arătați că $\log_2 4 + \log_5 25 < \sqrt{49}$.

23. Arătați că $\log_2 5 + \log_2 12 - \log_2 30 = 1$.

24. Arătați că $\log_5 \frac{2}{1} + \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \dots + \log_5 \frac{25}{24} \in \mathbb{N}$.

25. Arătați că: $\frac{\log_2 3}{\log_{14} 3} = 1 + \log_2 7$.

26. Dacă se notează $\log_3 2 = a$, arătați că $\log_3 24 = 1 + 3a$.

27. Determinați valoarea produsului $\lg(\lg 40^\circ) \cdot \lg(\lg 41^\circ) \cdot \dots \cdot \lg(\lg 45^\circ)$.

28. Determinați partea întreagă a numărului $\log_3 521$.

29. Arătați că $3 \in (\log_2 7, \sqrt[3]{30})$.

30. Calculați $e^{\ln 10} - \sqrt[3]{125}$.

31. Calculați $1000^{\lg 3} - \sqrt[5]{-32}$.

32. Determinați $m, n \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea $(m - 2n + 4) + (3m - 2n)\sqrt{3} = 0$.

33. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ dacă $1 + \sqrt{3}$ verifică ecuația $ax^2 + bx + 12 = 0$.

34. Rezolvați ecuația $[3x - 2] = 4$.

35. Fie $x, y \in [3, 5]$. Demonstrați că $a \in [3, 5]$, unde $a = xy - 4(x + y) + 20$.

36. Demonstrați inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

37. Folosind metoda inducției matematice, demonstrați că:

a) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*;$

b) $2^n > n^2, n \in \mathbb{N}, n \geq 5;$

c) 17 divide $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

38. Dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $x^2 - ax + b = 0, a, b \in \mathbb{Z}$, arătați că $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

39. a) Găsiți două numere iraționale a și b pentru care $a + b \in \mathbb{Q}.$

b) Găsiți două numere iraționale c și d pentru care $c \cdot d \in \mathbb{Q}.$

c) Arătați că suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

d) Arătați că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este un număr irațional.

40. Considerăm suma $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

a) Arătați că $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$

b) Calculați $S_n.$

c) Arătați că $S_n < 1$ și determinați cel mai mare $n \in \mathbb{N}^*,$ astfel încât $S_n < \frac{2009}{2010}.$

41. Se consideră mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$

a) Verificați că $0 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ și $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}].$

b) Verificați că, dacă $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}],$ atunci $x + y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ și $x \cdot y \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}].$

c) Arătați că $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}].$

d) Dați exemplu de un element din $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ care are inversul tot în $\mathbb{Z}[\sqrt{5}].$

42. Se consideră numărul real $\omega = 1 + \sqrt{2}$ și mulțimea $M = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$ Notăm

$\bar{\omega} = 1 - \sqrt{2}$ și cu $G = \{z \in M \mid \exists y \in M \text{ astfel încât } y \cdot z = 1\}.$

a) Verificați că $0 \in M$ și $1 \in M.$

b) Verificați că $\omega^2 = 2\omega + 1.$

c) Dacă $z, y \in M,$ atunci $z + y \in M$ și $z \cdot y \in M.$

d) Arătați că $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$

e) Arătați că $\omega \in G.$

f) Arătați că G are cel puțin 2010 elemente.

g) Arătați că $\omega^{2009} \notin \mathbb{Q}.$

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică în care $a_1 = 2$ și $r = 3$. Aflați al zecelea termen.
2. Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică cu $a_2 = 5$ și $a_4 = 13$, determinați a_1 și rația.
3. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu $b_1 = -2$ și $b_2 = 0$. Calculați suma primilor 10 termeni.
4. Dacă într-o progresie aritmetică $a_1 = -1$ și $S_{10} = 80$, determinați rația progresiei.
5. Determinați al zecelea termen al șirului 1, 5, 9, 13,
6. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_2 + a_4 + a_6 = 27$, iar $a_5 - a_3 = 6$. Determinați a_1 și r .
7. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ și $a_5 = 21$. Calculați:
 - a) a_{2017} ;
 - b) $a_1 + a_2 + \dots + a_{20}$;
 - c) soluțiile ecuației $\sqrt{x + a_1} = x - a_2$.
8. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ progresia aritmetică cu rația r și cu $a_2 + a_{40} = 16$ și $a_1 \cdot a_5 = 28$. Calculați a_1 și r .
9. Găsiți primul termen și rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_2 + a_4 = 16$ și $a_1 \cdot a_5 = 28$.
10. Aflați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere să fie termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice:

a) 2; 5; $3x - 1$;	b) 4; $2x + 1$; $2 - x$;	c) $5 - x$; $3x + 2$; $2x - 1$.
---------------------	----------------------------	------------------------------------
11. Calculați următoarele sume:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 2017$;	b) $2 + 4 + 6 + \dots + 250$;	c) $1 + 3 + 5 + \dots + 111$;
d) $1 + 4 + 7 + \dots + 76$;	e) $3 + 7 + 11 + \dots + 39$;	f) $2 + 7 + 12 + \dots + 2017$.
12. Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică cu termenii pozitivi.
 - a) Dacă $b_1 = 2$ și $q = 3$, aflați b_2 și b_5 .
 - b) Dacă $b_2 = 4$ și $q = 2$, aflați b_1 , b_3 și $b_1 + b_2 + b_3$.
 - c) Dacă $b_2 = \frac{1}{2}$ și $b_4 = \frac{1}{8}$, aflați b_3 , b_1 și q .
13. Dacă rația unei progresii geometrice este 3, iar al treilea termen este -54 , determinați primul termen al progresiei și suma primilor 10 termeni.
14. Dacă într-o progresie geometrică, $b_6 = 8 \cdot b_3$, aflați rația.
15. Se dă șirul $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$. Aflați termenii de pe locul 8 și respectiv 20.
16. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie geometrică. Dacă $a_4 + a_1 = \frac{7}{16}$ și $a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}$, să se precizeze a_1 și q (rația).
17. Primul termen al unei progresii geometrice este 5 și suma primilor 4 termeni este 75. Determinați progresia.

18. O progresie geometrică are 10 termeni, primul fiind 3, iar ultimul 1536. Se cere rația și suma termenilor progresiei.
19. Aflați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât următoarele numere să fie în progresie geometrică:
- a) $4; 6 - x; 9;$ b) $x + 1; \sqrt{3}; x + 3;$ c) $5 - x; x + 7; 3x + 11.$
20. Știind că 1, x, y se află în progresie aritmetică și că 1, x, y + 9 se află în progresie geometrică, aflați x și y.
21. Suma a trei numere în progresie aritmetică este 12. Dacă se adaugă fiecăruia respectiv 1, 2, 11, se obțin trei numere în progresia geometrică. Aflați aceste numere.
22. Calculați sumele:
- a) $4 + 4^2 + \dots + 4^{2017};$ b) $1 - 3 + 3^2 - \dots + 3^{2016};$ c) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{100}}.$
23. Dacă numerele $\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c}$ sunt în progresie aritmetică, arătați că numerele a, b, c sunt în progresie geometrică.
24. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sunt numere reale în progresie aritmetică cu rația r, cu $a_1 > 0$ și $r > 0$, arătați că
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{n}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{n+1}}}.$$
25. Determinați trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă suma lor este 15, iar suma pătratelor lor este 83.

Funcții

1. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, calculați $f(0) + f(1) + \dots + f(6)$.
2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$.
- a) Calculați $f(3) - f(-3)$.
- b) Aflați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = 5$.
- c) Determinați punctul de pe graficul lui f care are abscisa egală cu -1.
3. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + 2x$.
- a) Calculați $(g \circ g)(1)$.
- b) Rezolvați ecuația $g(x + 1) = 9$.
- c) Aflați punctul de pe graficul lui g care are ordonata egală cu -1.
4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$.
- a) Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(200)$.
- b) Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația $f(x) \leq 1$.
- c) Aflați a astfel încât $A(a + 2, 2a) \in G_f$.

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $f(x+1) = 2x+1$.

a) Arătați că $f(x) = 2x-3$.

b) Aflați punctul de pe grafic care are coordonatele egale.

c) Știind că $A(1, a)$ și $B(b, 1)$, determinați media aritmetică a numerelor a și b .

6. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-2 \leq 1\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \leq 3\}$;

c) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{1}{2x-3} > 0\right\}$;

d) $A = \left\{x \in \mathbb{Z}^* \mid \left|\frac{3x-2}{4}\right| \leq 2\right\}$.

7. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1-2x$ și $g(x) = x-1$. Aflați coordonatele punctului de intersecție dintre graficele celor două funcții.

8. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x-4$ și $g(x) = ax+b$. Calculați $|a+b|$, știind că punctul $A(1, -1)$ reprezintă punctul de intersecție dintre graficele celor două funcții.

9. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x-4$, determinați $f([1, 3])$.

10. Aflați domeniul maxim de definiție al următoarelor funcții:

a) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$;

b) $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$;

c) $h: D \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{2x+1} + 3\sqrt{4-x}$;

d) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(4x+1)$;

e) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_x 2 + \log_2 x$.

11. Precizați dacă următoarele funcții sunt pare sau impare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$;

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1-x^2$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

d) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

12. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$. Aflați a și b astfel încât G_f să conțină punctele $A(0, 1)$ și $B(1, 0)$.

13. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, determinați:

a) coordonatele punctelor de intersecție dintre G_f și axa ordonatelor;

b) distanța dintre punctele de intersecție ale G_f cu axa absciselor;

c) coordonatele vârfului parabolei asociate funcției.

14. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - ax + 3$. Aflați a , știind că abscisa vârfului parabolei este -1 .

15. Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3x - a$. Aflați a , astfel încât minimul funcției să fie $-\frac{1}{4}$.

16. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -ax^2 + 2x + 1$. Determinați a pentru care ordonata vârfului este egală cu $|-2|$.

17. Determinați coordonatele vârfului parabolei pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.
18. Determinați funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel ca graficul ei să aibă vârful în $V(1, 2)$ și să intersecteze axa Oy în $B(0, 3)$.
19. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2 - m)x^2 + 6x + 3 - m$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Se cere m dacă vârful graficului funcției se află pe axa Ox .
20. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$ vârful parabolei de ecuație $y = x^2 - 2(m - 1)x + m(m - 3)$ se află sub axa Ox .
21. Determinați imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
22. Determinați imaginea funcției $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
23. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$. Determinați a , b , c știind că punctele $A(0, 2)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 2)$ aparțin graficului funcției f .
24. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Calculați:
- a) $f(1) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(2017)$; b) $f(0) \cdot f(2) \cdot f(4) \cdot \dots \cdot f(2018)$.
25. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 5x + 1$. Ordonăți crescător numerele: $f(\sqrt{10})$, $f(4)$, $f(\sqrt{17})$.
26. Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 1$. Determinați valoarea lui m pentru care:
- a) punctul de minim al lui f este 2;
- b) valoarea minimă a lui f este -2 .
27. Pentru $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ se consideră $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m + 1)x^2 - (2m + 3)x + (m - 1)$.
- a) Rezolvați ecuația $f_1(x) = 0$.
- b) Aflați m , astfel încât valoarea maximă a funcției f_m să fie $-\frac{11}{4}$.
- c) Există valori ale lui m pentru care graficul lui f_m este tangent axei Ox ?
- d) Determinați valorile lui m pentru care ecuația $f_m(x) = 0$ are două rădăcini reale și distincte.
28. Se consideră ecuația $x^2 - 5x + 5 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 .
- a) Calculați $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.
- b) Formați ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile y_1 și y_2 astfel încât $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$.
29. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 - (3m + 2)x + 1 - 5m = 0$ să aibă rădăcinile x_1 , $x_2 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x_1 \cdot x_2 < 0$.

30. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile ecuației $x^2 + (m-1)x + m = 0$ verifică relația

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{6}.$$

31. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care o rădăcină a ecuației $x^2 - mx + m - 2 = 0$ este dubla celeilalte.

32. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor rădăcinilor ecuației:

$$x^2 - (2-m)x - m - 3 = 0 \text{ să fie minimă.}$$

33. Se consideră ecuația $2x^2 + (3m-1)x + m^2 + 1 = 0$. Aflați m , astfel încât:

- ecuația să nu aibă rădăcini reale;
- ecuația să aibă rădăcini opuse;
- ecuația să aibă rădăcini inverse una alteia.

34. Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$, calculați suma $f(1) + f(2) + \dots + f(2009)$.

35. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $\frac{2x+3}{x+2} \geq \frac{x-1}{x-2}$.

36. Rezolvați sistemele:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-2 \end{cases}; & \text{b) } \begin{cases} x=-1-y \\ x=-\frac{6}{y} \end{cases}; & \text{c) } \begin{cases} x+xy+y=11 \\ x-xy+y=1 \end{cases}; \\ \text{d) } \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-xy-2y^2=7 \end{cases}; & \text{e) } \begin{cases} x^2+y^2=202 \\ xy=99 \end{cases}. & \end{array}$$

37. Fie $F_m(x) = \frac{(m+1)x^2 + (2m-1)x + 3m-1}{x^2 + 2mx + m^2 + 1}$, $m \in \mathbb{R}$.

- Rezolvați ecuația $F_0(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- Determinați valorile lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $F_{-1}(x)$ are sens.
- Determinați valorile lui m pentru care $F_m(x)$ are sens.

38. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - (m+1)x + m - 2$.

- Arătați că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, parabolele asociate acestor funcții vor intersecta axa Ox în două puncte distincte.
- Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{1}{x_1-1} + \frac{1}{x_2-1} \geq 2$, unde x_1 și x_2 sunt rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0$.

39. Fie familia de parabole $f_m(x) = mx^2 + (2m-1)x + m - 2$, $m \in \mathbb{R}^*$.

- Rezolvați $f_1(x) = 0$.
- Determinați $m \in \mathbb{R}$, astfel încât între rădăcinile ecuației $f_m(x) = 0$ să existe relația:

$$x_1^2 + x_2^2 = 3.$$

c) Determinați m astfel încât $f_m(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Determinați m astfel încât vârfurile parabolilor aflați pe a doua bisectoare ($y = -x$).

40. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ și $a \neq 1$.

a) Calculați $f \circ f$.

b) Arătați că $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \forall x \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Arătați că $(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}})(x) = a^n x + ab \frac{a^n - 1}{a - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Calculați suma $\sum_{k=1}^n f((2k-1)^2)$.

Vectori în plan. Geometrie analitică în plan

1. În triunghiul ABC se consideră M, N și P mijloacele laturilor [BC], [AC] și respectiv [AB]. Arătați că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ și că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

2. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătați că pentru orice punct O din plan, avem $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

3. Fie ABCD un paralelogram și O un punct oarecare din plan. Arătați că:
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

4. Demonstrați că patrulaterul convex ABCD este paralelogram dacă și numai dacă pentru orice punct O din planul (ABC) avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

5. Fie triunghiul ABC cu medianele (AM), (BN), (CP) și cu G centrul de greutate. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

6. Demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|.$$

7. Fie E și F mijloacele diagonalelor (AC) și (BD) ale patrulaterului convex ABCD. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{EF}$.

8. Prin punctul M interior cercului C(O, R) se duc coardele perpendiculare [AB] și [CD]. Demonstrați că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

9. Fie ABCDEF un hexagon regulat înscris în cercul C(O, R). Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.